

§5. Обоснование метода Фурье для одномерного уравнения теплопроводности (основные принципы)

(23)

I) Корректность полученного разложения на основе простейшей задачи с краевыми условиями 1-го рода. Рассмотрим простейшую задачу:

$$(1) \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Её решение по методу Фурье имеет вид:

$$(1.1) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} \sin kx, \quad \text{где} \quad A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx.$$

Тем. Пусть $\varphi \in C^1[0, \pi]$, причем $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Тогда ряд (1.1) определяет ф-цию $u(x, t)$ из класса $C([0, \pi] \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}([0, \pi] \times (0, \infty))$, удовлетворяющую всем соотношениям в з. (1) (т.е. (1.1) есть подлинное решение з. (1)).

Предварительная лема из теории рядов Фурье.

Пусть $\varphi \in C^1[0, \pi]$, причем $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Пусть $A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = \varphi(x)$ на $[0, \pi]$ и ряд сходится к $\varphi(x)$ абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$, $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty$.

Док-во леммы. $A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx = -\frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \varphi(x) d \cos kx = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \varphi'(x) \cos kx dx = \frac{1}{k} B'_k$,

где $B'_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi'(x) \cos kx dx$, $\varphi' \in C[0, \pi]$.

$$A_k = \frac{1}{k} B'_k \Rightarrow |A_k| = \left| \frac{1}{k} B'_k \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |B'_k|^2 \right).$$

(Используется элементарное нер-во: $2|\alpha\beta| \leq \alpha^2 + \beta^2$ для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} |B'_k|^2 \right) < \infty, \quad \text{пбо} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{ряд Эйлера})$$

и $\sum_{k=1}^{\infty} |B'_k|^2 < \infty$ - нер-во Бесселя для коэфф. Фурье от непрерывной ф-ции.

Итак, $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx$ сходится абсолютно и равномерно (24)

(по признаку Вейерштрасса). Пусть $S(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx$ - его сумма, $S \in C[0, \pi]$.

Тогда $(S(x) - \varphi(x)) \perp \sin mx$ на $[0, \pi]$ для $\forall m \in \mathbb{N}$, ибо

$$\int_0^{\pi} (S(x) - \varphi(x)) \sin mx dx = \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \right) \sin mx dx - \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin mx dx \stackrel{\frac{\pi}{2}}{=} A_m - A_m = 0$$

$\Rightarrow S(x) - \varphi(x) \equiv 0$ на $[0, \pi]$ из системы $\{\sin mx\}_{m=1}^{\infty}$. $\Rightarrow$

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx$, где ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$. $\square$

Док-во теоремы. По лемме $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty \Rightarrow$ ряд (1.1) дифференцируема в $[0, \pi] \times [0, \infty)$ абс. сходящийся числовой ряд и, значит, сходится абс. и равномерно на $[0, \pi] \times [0, \infty)$ к непрерывной ф-ции $u(x, t)$. При этом

$$u(0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} \sin(k \cdot 0) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$u(\pi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} \sin(k\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot 1 \cdot \sin kx = \varphi(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq \pi.$$

Рассмотрим "продифференцированный" ряд (1.1). Пусть $t \geq \varepsilon > 0$, где ε - фикс. число. Тогда:

$$a) \text{ для } \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} (A_k e^{-k^2 t} \sin kx) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot e^{-k^2 \varepsilon} \cdot k^m < \infty,$$

$$b) \text{ для } \frac{\partial^j}{\partial t^j} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} (A_k e^{-k^2 t} \sin kx) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot k^{2j} \cdot e^{-k^2 \varepsilon} < \infty.$$

Сходимость числовых рядов проверяется по признаку Даламбера. Аналогичные оценки получаются для смешанных производных $\frac{\partial^{m+j}}{\partial t^j \partial x^m}$. Итак, ряд составленный из производных $\forall$ порядка от членов ряда (1.1) сх. абсолютно и равномерно на м-ве $[0, \pi] \times [\varepsilon, +\infty)$.

$\Rightarrow$ ф-ция $u(x, t)$ обладает произв. $\forall$ порядка на $[0, \pi] \times [\varepsilon, +\infty)$ и эти производные можно получать почленным дифференцированием ряда (1.1).

Но $\varepsilon > 0$ - произвольно. $\Rightarrow u \in C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$, причем

(25)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (-k^2 e^{-k^2 t}) \sin kx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} (-k^2 \sin kx). \Rightarrow$$

$$u_t = u_{xx} \text{ при } 0 \leq x \leq \pi, t > 0.$$

□

В Фактически мы показали, что $u \in C([0, \pi] \times [0, \infty)) \cap C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$, т.е. при $t > 0$ решение (1.1) оказывается бесконечно дифференцируемым (за счет сглаживающих свойств коэф. $e^{-k^2 t}$). Подобный эффект всегда наблюдается в решениях ур-я теплопроводности.

Вывод: формула (1.1) действительно определяет решение З. (1).

Вопрос: но можем быть у задачи есть другие решения, отличные от (1.1)?

Тогда физическая сущность метода Фурье окажется под вопросом.

Покажем, что это не так — решение единственно, причем рассмотрим сразу самую общую ситуацию.

II) Единственность решения в классической смешанной задаче для ур-я теплопроводности

Рассл. классическую краевую задачу

$$(2) \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ \Gamma_0(u) = \mu_0(t), \quad \Gamma_l(u) = \mu_l(t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad \underline{u = u(x, t) = ?}$$

Тео. Задача (2) с заданными $f(x, t)$, $\mu_0(t)$, $\mu_l(t)$, $\varphi(x)$ имеет не более одного решения в классе $C([0, l] \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}([0, l] \times (0, \infty))$.

Док-во. Допустим, что есть два решения $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ из указанного класса.

Пусть $v(x, t) \equiv u^{(1)}(x, t) - u^{(2)}(x, t)$. Тогда

$$(2.0) \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ \Gamma_0(v) = \Gamma_l(v) = 0, \\ v(x, 0) = 0, \end{cases}$$

т.е. $v(x, t)$ есть решение однородной задачи (2.0).